ГЛАВА 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПЕРАТОРЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

1.1. Виды случайных процессов

Что такое случайный процесс, интуитивно понимает каждый. Его строгое определение мало отличается от интуитивного. *Случайным процессом* называется такой процесс (то есть изменение во времени состояния некоторой системы), течение которого зависит от случая и для которого определена вероятность того или иного его течения. Иначе говоря, под случайным процессом понимают процесс перехода системы из одних состояний в другие, протекающий случайным образом. Случайные процессы называют также стохастическими, вероятностными или случайными функциями. Их виды весьма разнообразны, но нас будет интересовать только один их тип, называемый цепями Маркова.

Для того чтобы ввести основные понятия, связанные с цепью Маркова, рассмотрим знакомую с детства игру, иногда называемую «Тише едешь, дальше будешь». Существует много её разновидностей, но смысл всех примерно одинаков: играющий должен быстрее других добраться из пункта А в пункт Б (рис.1.1).

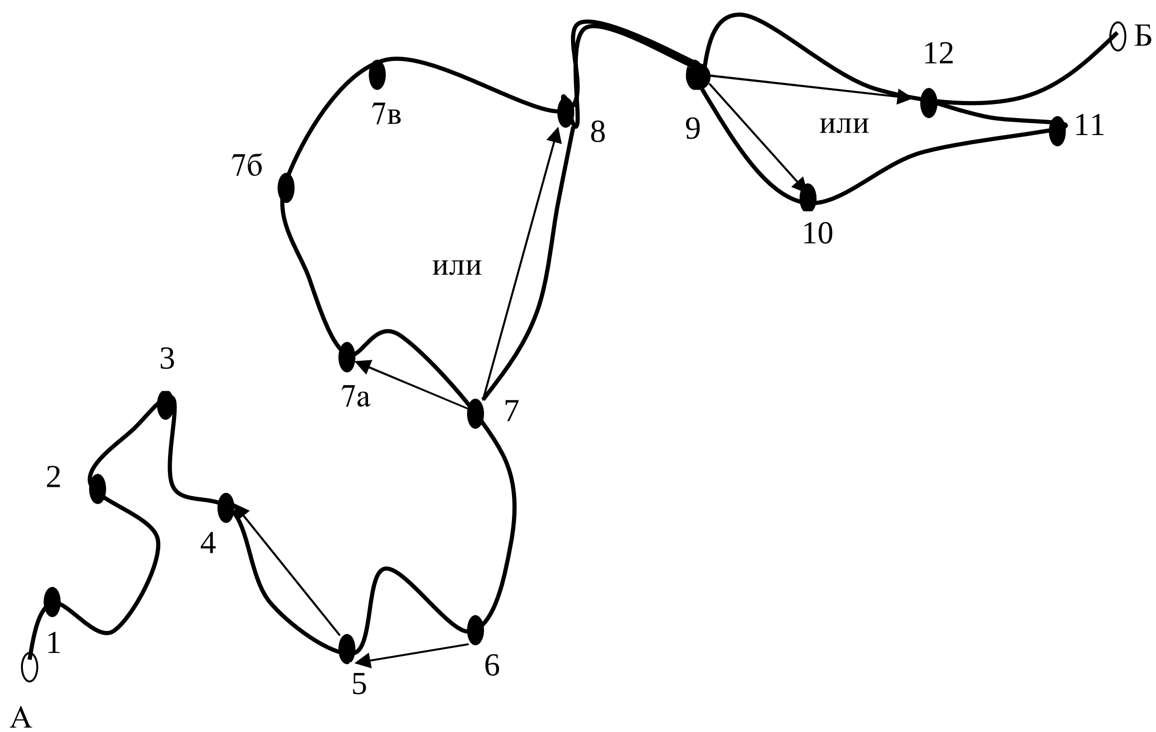


Рис.1.1. «Тише едешь, дальше будешь»

Весь путь от А к Б разбит на отдельные этапы – отрезки. Перемещение на то или иное количество отрезков определяется результатом бросания игрального кубика с ячейками с 1 до 6. Очевидно, что для каждого последующего шага его «длина» является случайной величиной, определяемой результатом бросания кубика. Для большего интереса в игру вводятся различные условия. Например: при попадании в пункт 2 играющий пропускает очередной ход – «попадает в яму», при попадании в пункт 7 необходимо «поехать в объезд» или даже вернуться на несколько отрезков назад и т.д. Благодаря таким «превратностям судьбы», игрок, у которого все время выпадают счастливые пятерки и шестерки, может даже оказаться позади менее удачливого на первый взгляд партнера по игре. Отсюда и название игры – «Тише едешь, дальше будешь».

Каждое бросание кубика игроком есть своеобразное испытание везения. В теории вероятностей это так и называется *испытанием* (или опытом). В результате каждого испытания происходит случайное событие, заключающееся здесь в выпадении грани кубика с определенным числом очков, и связанное с ним перемещение на определенное число отрезков. Положение фишки каждого игрока на трассе будем называть состоянием. Итак, наша игра может быть представлена как последовательность испытаний, приводящих к случайным событиям и смене состояний. Каждую реализацию игры можно представить графически, если по оси ординат откладывать номер пункта (состояния), в котором находятся фишки играющих, а по оси абсцисс – номер каждого очередного бросания кубика. Если соединить эти точки прямыми линиями, то получится траектория движения игроков к финишу, причем номер бросания кубика играет здесь роль времени, точнее, его целочисленного аналога.

Обратим внимание на одно важное свойство, присущее этой игре. Положение вашей фишки после очередного броска (будущее) зависит только от того, где она находилась перед броском (настоящее), и числа очков, выпавших на кубике (случайная величина). Оно никак не зависит от того, как вы попали в положение перед броском кубика, то есть от всей предыдущей истории игры (прошлое). Будущее состояние определяется только настоящим состоянием и не зависит от прошлого состояния. В этом случае говорят, что будущее и прошлое взаимно независимы, что процесс не хранит памяти о прошлом, или называется процессом без последействия (без памяти). Это условие является определяющим для отнесения дискретного случайного про-

цесса к цепям Маркова и иногда называется свойством марковости.
Таким образом, проводя анализ данной игры, можно сделать следующие выводы:

- во время игры происходит последовательная (дискретная) случайная смена состояний;
- вероятность попадания в каждое очередное состояние является величиной зависимой (в нашем примере она зависит только от настоящего состояния и не связана с тем, как мы в него попали).

Для расширения спектра примеров возьмем колоду карт, скажем, в 52 карты. Проделаем следующий опыт: будем доставать по одной карте из колоды, определять ее масть и класть обратно. Для чистоты эксперимента после каждого опыта карты будем перемешивать. Очевидно, что появление карты определенной масти будет случайным. Какова вероятность того, что вытащенная наугад карта будет заданной масти? Для описанных выше условий при достаточно большом числе опытов теория вероятностей может довольно точно предсказать результат количественно. Пусть событие А – извлечение из колоды карты заданной масти. Вероятность Р(А) можно рассчитать как отношение числа случаев М(А), благоприятствующих событию А, к их общему числу N. В колоде из 52 карт имеется 13 карт одной масти, поэтому для нашего примера $M(A)=13$, а $N=52$, то есть $P(A)=13/52=0,25$. Введем теперь событие В, заключающееся в появлении карты той же масти при ее вторичном извлечении из колоды. Очевидно, если после каждого опыта карту класть в колоду и тщательно перемешивать, то $P(A)=P(B)=0,25$. Теперь изменим условия опыта: вытащив карту определенной масти, отложим ее в сторону. Воспроизведем далее событие В. Теперь уже его вероятность будет зависеть от того, карта какой масти была извлечена первой. Если была вытащена карта той же масти, то $P(B)=12/51<0,25$, а если другой, то $P(B)=13/51>0,25$. Это означает, что в данном случае вероятности событий зависят друг от друга, и такие опыты (испытания) в теории вероятностей называют *зависимыми*. При этом вероятность В называется условной по отношению к событию А. Кроме того, так же, как и в предыдущем примере, здесь идет последовательная (дискретная) смена состояний. Только состоянием теперь уже будет количество карт той или иной масти в колоде после каждого извлечения карты. Оказывается, что и в этом случае переход в каждое последующее состояние непосредственно связан с настоящим состоянием.

Как уже упоминалось в рассмотренных примерах, вероятность появления каждого последующего состояния зависит только от настоящего. В самом деле, успех или неуспех очередного хода в игре «Тише едешь, дальше будешь» напрямую связан с текущим (настоящим) пунктом на маршруте; карточное состояние зависит от наличия в колоде того или иного количества карт определенной масти. Случайные процессы, обладающие таким свойством, называются марковскими. Более точно с позиций современной терминологии можно сказать, что А.А. Марков заложил основы случайных процессов с дискретными состояниями и временем, то есть собственно марковских цепей. Но марковскими называют сейчас и другие виды случайных процессов. Главным общим свойством таких процессов является наличие вероятностной связи, зависимости между состояниями. Иногда считают, что марковским более точно следует называть случайный процесс, у которого вероятность каждого последующего состояния связана только с настоящим: марковские процессы без последействия. Говорят, что у таких процессов «будущее определяется только через настоящее». Но можно легко представить случайные процессы, у которых на вероятность наступления последующего события влияет не только текущее, но одно, два, три или более предыдущих состояний. Такие процессы также рассматривались А.А. Марковым. Он предложил называть их *сложной цепью*. Оказывается, что и в этом случае путем введения некоторых допущений можно условно привести математическое описание к случаю простой марковской цепи. Для этого надо включить в понятие настоящего состояния другие, более ранние, от которых зависят будущие.

Реальные явления в жизни далеко не всегда подчиняются удобным для нас законам. Приходится усложнять применяемые подходы и математические модели. Так, например, появились модели, носящие название полумарковских процессов. Картинку полумарковского процесса можно представить на примере рассмотренной выше игры «Тише едешь, дальше будешь». Раньше, чтобы узнать, на сколько шагов нам можно переместиться после очередного бросания кубика в игре, мы бросали его один раз. Это и был своеобразный розыгрыш состояния. В полумарковском процессе мы изменяем правило игры: после розыгрыша состояния надо бросить кубик еще раз, чтобы определить, сколько же времени мы пробудем в этом состоянии (розыгрыш времени пребывания в нем). В описании этого процесса математический аппарат несколько усложняется, однако появляется возможность моделирования более широкого класса объектов.

Все приведенные выше примеры относились к марковским процессам с прерывистыми (дискретными) состояниями, однако это не всегда так. Случайным процессам с непрерывными состояниями также может быть присуще свойство марковости. Оно помогает существенно упростить математический аппарат и решать сложные теоретические и практические задачи. Возможные виды случайных процессов представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Виды случайных процессов

Вариант	**Вид функции**	**Вид аргумента**	**Название случайного процесса**
1	Дискретная	Дискретный	Дискретная случайная последовательность – марковская цепь
2	Дискретная	Непрерывный	Дискретный случайный процесс
3	Непрерывная	Дискретный	Непрерывная случайная последовательность
4	Непрерывная	Непрерывный	Непрерывный случайный процесс
5	Непрерывная +дискретная	Непрерывный	Смешанный случайный процесс

Нами были проиллюстрированы далеко не все варианты, упомянутые в табл. 1.1. Однако все они применяются в настоящее время при математическом моделировании тех или иных явлений. Кроме того, необходимо отметить, что в рассмотренных примерах мы лишь ограничились анализом случайных процессов. Чрезвычайно важной задачей является всегда не только констатация фактов, но и возможность воздействия на процесс в целях получения максимального эффекта, сформулированного заранее. Такие процессы называются *управляемыми*.

Проиллюстрируем управляемый случайный процесс на примере детской игры «Горячо - холодно». Заключается она в том, что водящему завязывают глаза, выводят на середину комнаты, несколько раз вращают для полной потери ориентировки. Потом ему предлагается найти одного из играющих, находящегося у стен комнаты. После каждого шага водящего присутствующие оживленно комментируют правильность его действий и корректируют направление, подавая команды-подсказки «горячо – холодно». Каждый шаг водящий делает в случайном направлении, но случайность здесь неполная, частично управляемая. Очевидно, что весь процесс может быть описан дискретной марковской цепью, так как каждый шаг, то есть изменение состояния (под состоянием здесь следует понимать координаты водящего), определяется только настоящим состоянием и никак не связан с каким-либо предыдущим.

Выше мы употребили выражение «получение максимального эффекта» в некотором случайном процессе. Оно требует ряда комментариев. Пусть W – выбранный показатель эффективности (и притом единственный; иначе задача станет многокритериальной). Например, это прибыль от торговли некоторым товаром. Необходимо выбрать такую стратегию поведения u (управляющее воздействие), при которой показатель W оказался бы максимальным. Однако следует помнить, что принятие решения происходит в условиях неопределенности. Существуют случайные факторы (обозначим их ξ), которые оказывают воздействие на конечный результат, то есть на W. Кроме того, всегда имеется совокупность заданных, заранее известных факторов, которые обозначим через α. Показатель эффективности оказывается зависящим от трех групп факторов: совокупности известных факторов α, совокупности случайных факторов ξ и управляющего воздействия u (стратегии поведения):

$$W=W(\alpha, \xi, u). \qquad (1.1)$$

В примере с торговлей товаром под α следует понимать выделенные средства на приобретение товара, предоставленные помещения и т.д. Под ξ понимается количество покупателей (оно колеблется случайным образом от одного дня к другому), время прихода покупателей (возможны случайные скопления покупателей, приводящие к длинным очередям), выбор покупателями того или иного товара (спрос на данный товар случайно колеблется со временем) и т.д.

Поскольку факторы ξ случайные, то и показатель эффективности W оказывается случайной величиной. Возникает вопрос: можно ли максимизировать случайную величину? Ответ вполне ясен: разумеется, нельзя. Какое бы управление u мы ни выбрали, W останется случайной величиной и нельзя заставить ее принять максимальное значение. Но ответ не должен обескураживать. В условиях неопределенности мы, действительно, не может со стопроцентной гарантией сделать показатель эффективности максимальным. Однако соответствующим выбором управления мы можем обеспечить это *с большей или меньшей вероятностью.*

1.2. Графы цепей Маркова. Матрица переходных вероятностей. Вектор состояния. Начальный вектор

Начнем непосредственное рассмотрение теории цепей Маркова со следующего примера: игрок, участвующий в некоторой, например карточной, игре. Не надо удивляться тому, что нам часто приходится ссылаться на карточные и другие игры. Ведь в них теория вероятностей проявляется в полном объеме.

Итак, игрок начинает игру, имея в кармане $2. Каждый раз он ставит на кон $1. С вероятностью p он выигрывает эту игру, а с вероятностью 1 – p проигрывает. Его цель – увеличить свою сумму до $4; если цель достигается, то он игру заканчивает. Естественно, он заканчивает игру, если у него не остается денег, то есть после очередной партии он имеет $0. Все возможные состояния игрока могут быть представлены графиком – графом цепи Маркова, показанным на рис.1.2.

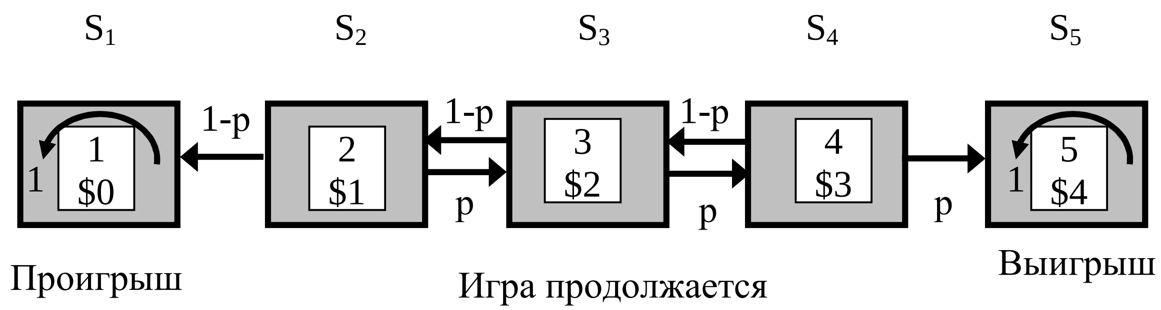


Рис.1.2. Граф цепи Маркова в примере с игроком

Если он находится в одном из состояний 2 … 4, игра продолжается и игрок может перейти в одно из соседних состояний. Однако, попав в состояния 1 (кончились деньги) или 5 (достигнута цель), он заканчивает игру: возврат из состояний 1 и 5 в другие ячейки невозможен.

Состояния, в которые возможен вход, но из которых невозможен выход, называются поглощающими. Вероятность оставаться в них равна единице.

Переходы, возможные в цепи и показанные на ее графе, могут быть организованы в *матрицу переходных вероятностей*, которая для данного примера имеет вид

$$
\begin{array}{c}
\text{Состояние} \\
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1\text{-p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\text{-p} & 0 & 0 \\ 0 & \text{p} & 0 & 1\text{-p} & 0 \\ 0 & 0 & \text{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{p} & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad (1.2)
$$

Правила ее построения достаточно очевидны. Она имеет размер mxm, где m – число возможных состояний (в данном примере m=5). Каждый ее столбец принадлежит определенному состоянию. В этом столбце в строке с номером состояния, куда возможен переход (указанный стрелкой на графе), следует разместить вероятность этого перехода.

Если мы подойдем к игроку после окончания очередной игры в партии, мы может застать его в одном из пяти (в общем случае из m) состояний 1,2, … ,5. Обозначим вероятности этих состояний S_i, i=1,…,5, и организуем их в вектор-столбец

$$
\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix}. \qquad (1.3)
$$

Сразу же необходимо подчеркнуть, что в довольно большой доле литературных источников **S** представляют в виде вектора-строки, а в матрице **P** состояния приписывают строкам, а не столбцам (очевидно, что при переходе к такому представлению матрица (1.2) заменяется на транспонированную матрицу, у которой строки и столбцы меняются местами).

Пусть нам известен вектор $\mathbf{S}^{\mathbf{k}}$ перед k-й игрой (начиная с первой). После этой игры он изменится и перейдет в вектор $\mathbf{S}^{\mathbf{k+1}}$. Легко убедиться, что оба этих вектора связаны рекуррентным матричным равенством

$$\mathbf{S}^{k+1}=\mathbf{P}\mathbf{S}^{k}, \qquad (1.4)$$

которое и определяет эволюцию состояния системы (цепи).
Для того чтобы начать расчеты по равенству (1.4), необходимо знать начальный (первый) вектор состояния $\mathbf{S}^1$. В рассматриваемом примере игрок всегда начинает игру с суммой \$2, то есть находится в состоянии 3 с вероятностью, равной единице. В этом случае $\mathbf{S}^1$ имеет вид

$$\mathbf{S}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.5)$$

Прежде чем начать статистический анализ эволюции состояния игрока, рассмотрим некоторые варианты индивидуальной реализации игры. Пусть игрок выигрывает отдельную партию с вероятностью $p=0{,}5$ (на это рассчитаны большинство «честных» азартных игр). Расчетная схема реализации довольно проста. Имея \$2, мы бросаем монетку и при выпадении, скажем, орла увеличиваем сумму на единицу, а при решетке уменьшаем ее на единицу. Если после очередного хода получается \$0 или \$4, игра прекращается. Естественно, что при случайном выпадении орла или решетки каждая эволюция будет разной. На рис.1.3 показано 9 реализаций индивидуальных партий. Одни партии ведут к выигрышу, другие – к проигрышу, одни длятся короче, другие длиннее. Интуитивно ясно, что при принятых правилах игры и $p=0{,}5$ вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,5 (продумайте, какие именно из условий игры это обеспечивают). На рис.1.3 номера реализаций с выигрышным окончанием выделены прямоугольной рамкой. Их четыре при девяти испытаниях, то есть вероятность выигрыша получается 4/9. Вероятность выигрыша 0,5 получится при очень большом числе испытаний (формально – стремящемся к бесконечности); девяти испытаний для получения достоверного результата очевидно мало.

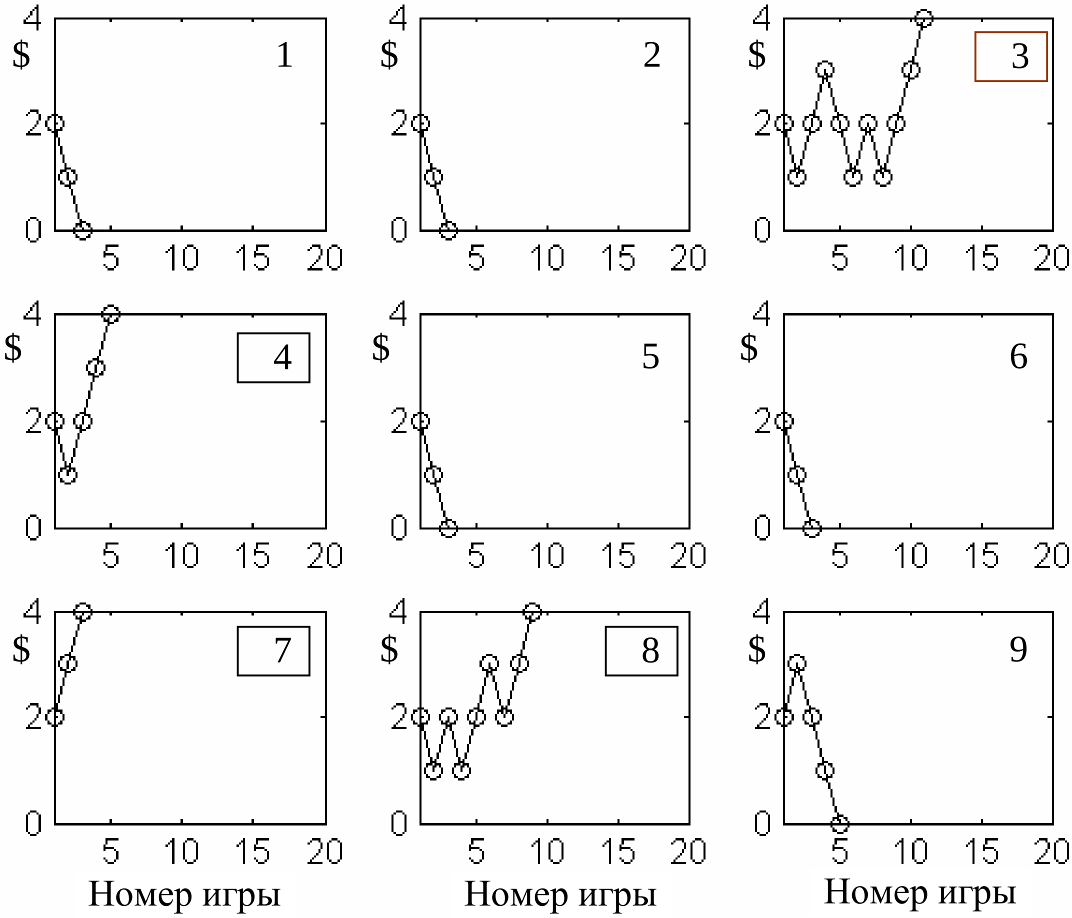


Рис.1.3. Индивидуальные реализации состояния игрока
в игре (p=0,5)

Теперь рассмотрим, как развивается процесс по равенству (1.4). Эти результаты показаны на рис.1.4 для трех значений вероятности выигрыша в отдельной партии 0,5 (нейтральный игрок), 0,25 (плохой игрок) и 0,75 (хороший игрок). Напомним, что вектор $\mathbf{S}^{\mathbf{k}}$ показывает распределение вероятностей найти игрока в одном из пяти состояний после k партий игры. Очевидно, что застать его неиграющим можно только после двух партий. Для p=0,5 распределение симметрично относительно начального состояния 3, и вероятности застать его выигравшим или проигравшим одинаковы (показаны справа для большого числа сыгранных партий). При p=0,25 (плохой игрок) вероятность застать его проигравшим заметно больше, чем застать его выигравшим, и в пределе стремится к 0,9. При p=0,75 (хороший игрок) наблюдается прямо противоположная ситуация.

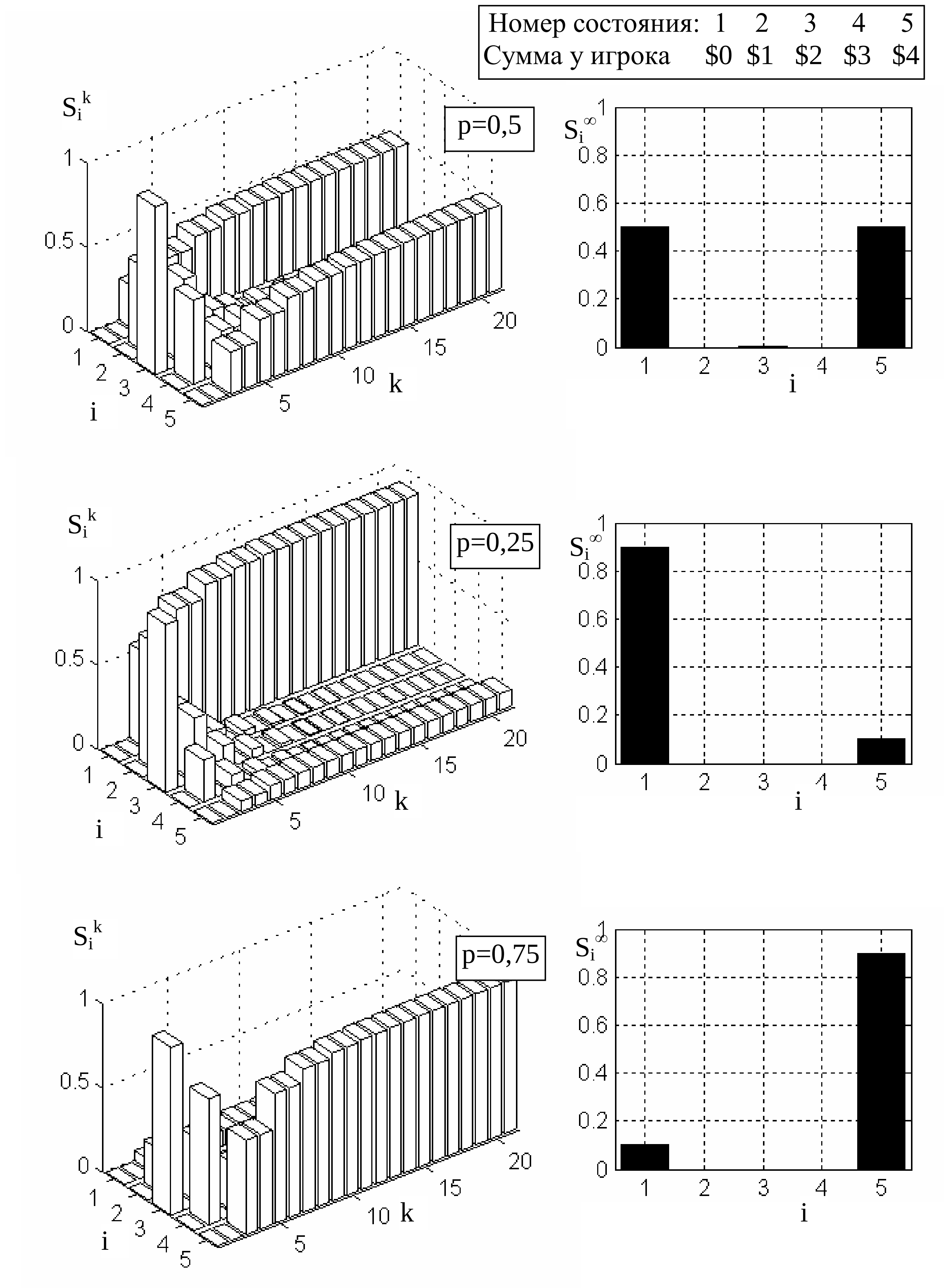


Рис.1.4. Эволюция состояния игрока при разных вероятностях выигрыша одиночной партии

Перейдем к некоторым обобщениям. Можно представить процесс, в котором возможны переходы из каждого состояния в любое другое. В этом случае матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\mathbf{P} = \left[p_{ij} \right] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix}, \qquad (1.6)$$

где p_{ij} – вероятность перейти из состояния j в состояние i на очередном переходе. На главной диагонали матрицы размещены элементы p_{ii} – вероятности перейти из i-го состояния в само себя, то есть просто остаться в нем в течение перехода.

В принципе вероятности p_{ij} могут быть любыми: они формируются исходя из формулировки конкретной задачи. Однако в любом случае они должны непременно удовлетворять двум условиям: условию

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1,\ j=1,2,\ldots,m, \qquad (1.7)$$

вытекающему из того, что вероятности в столбце относятся к полной группе событий (какое-то из них обязательно настанет) и их сумма должна быть равной единице, и условию

$$0 \le p_{ij} \le 1, \qquad (1.8)$$

вытекающему из природы понятия вероятности.

Если матрица **P** *остается постоянной в течение всего процесса, то отображаемая ею цепь называется однородной*.

Существуют, однако, процессы, в которых матрица переходных вероятностей может меняться от перехода к переходу. Например, можно предположить, что «свежий» игрок, начав играть с вероятностью выигрыша p_1, с каждой игрой устает, и эта вероятность снижается, то есть $p=p(k)$. Тогда и матрица (1.2) меняется, то есть $\mathbf{P}=\mathbf{P}(k)$. В этом случае цепь называется *неоднородной*, но все еще остается *линейной*.

Наконец, существуют процессы, в которых матрица переходных ве-

роятностей зависит от вектора состояния, то есть $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{S}^{\mathbf{k}}, k)$. В этом случае цепь становится *нелинейной* и, естественно, неоднородной.
Вернемся к пространству состояний дискретного случайного процесса – цепи Маркова, представляемому ее графом (например, рис.1.2).
Состояние i *называется достижимым из состояния* j, *если по указанным на графе стрелкам можно перейти из* i *в* j. В противном случае состояние называется *недостижимым*. На графе рис.1.2 состояние 4 достижимо из состояния 2, но недостижимо из состояния 1; состояние 5 достижимо из состояния 3, но недостижимо из состояния 1.
Если в цепи любое состояние достижимо из любого другого, то цепь называется эргодической.
Это определение не является вполне исчерпывающим, но его достаточно, чтобы понять смысл: в эргодической цепи вероятности состояний свободно блуждают по всем состояниям. Пример эргодической цепи показан на рис.1.5, где считается, что все $p_{ij}>0$.

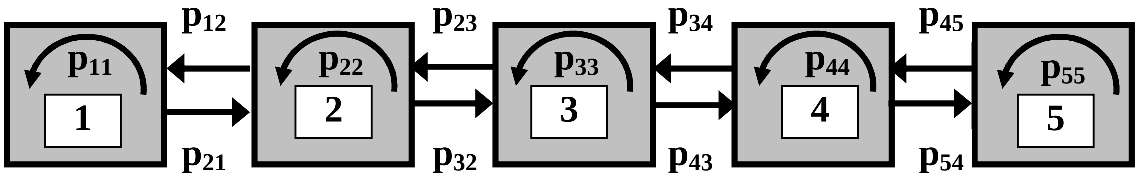


Рис.1.5. Пример эргодической цепи Маркова

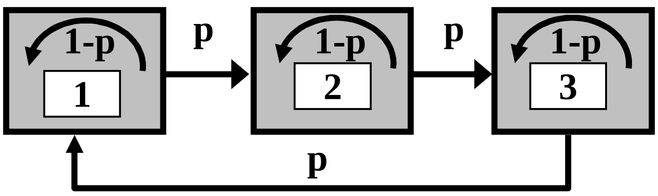
Матрица переходных вероятностей для этой цепи имеет вид

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix}. \qquad (1.9)$$

Она является трехдиагональной и часто встречается при моделировании случайных процессов.
Определить, является ли цепь эргодической, можно по матрице переходных вероятностей. Рассмотрим, например, матрицу

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,1 \end{bmatrix}. \qquad (1.10)
$$

Она, очевидно, не является эргодической, так как состояния 3 и 4 недостижимы из состояний 1 и 2 и наоборот. Матрица объединяет две совершенно независимых цепи по два состояния в каждой.
Напротив, показанная ниже цепь (и ее матрица) является эргодической, так как из любого состояния есть путь в любое другое.



$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1\text{-}p & 0 & p \\ p & 1\text{-}p & 0 \\ 0 & p & 1\text{-}p \end{bmatrix}. \qquad (1.11)
$$

Эволюция состояния этой системы для p=0,9 показана на рис.1.6 (начальное состояние видно из рисунка).

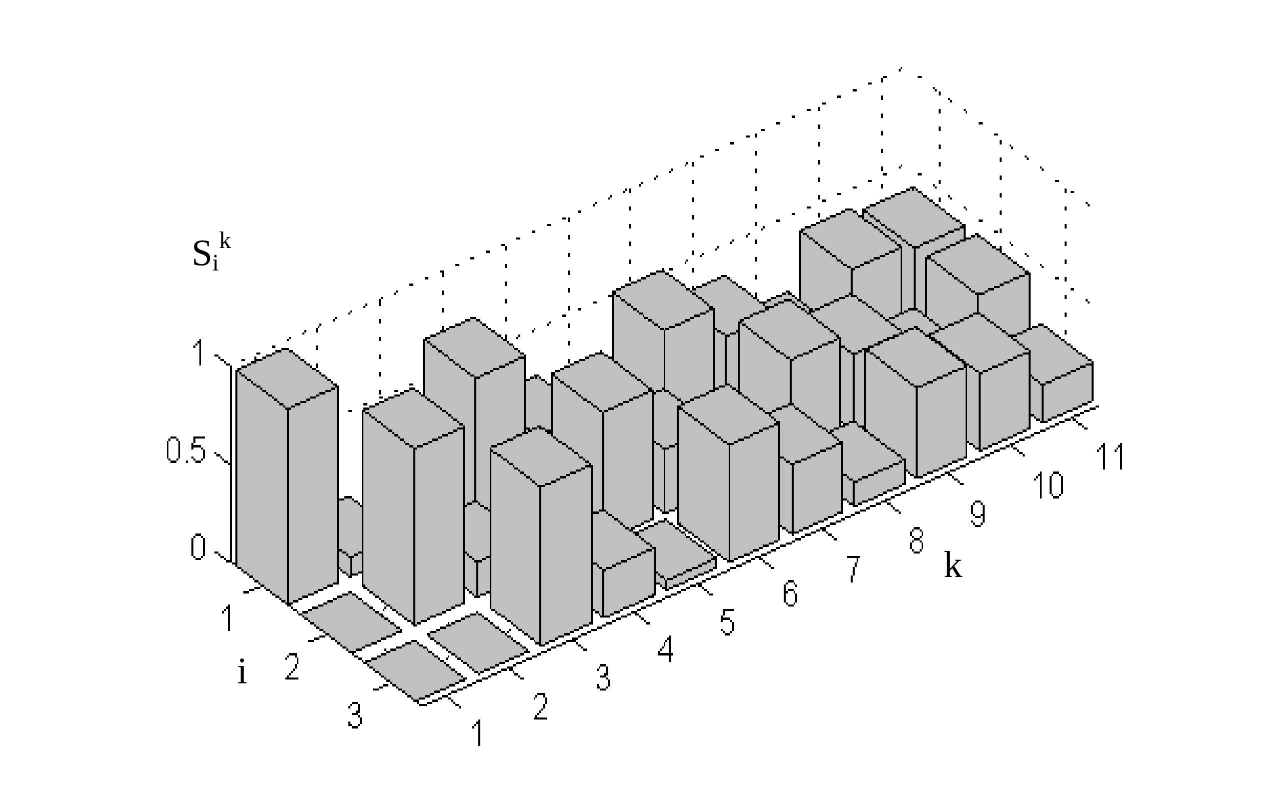


Рис.1.6. Эволюция состояния эргодической цепи с матрицей (1.11)

Достаточно часто при моделировании случайных процессов нас интересует не переходный процесс, а установившееся распределение вероятностей состояния, которое наступает при большом числе переходов, формально – при числе переходов, стремящемся к бесконечности. Обозначим вектор установившегося распределения $\mathbf{S}^{\infty}$ и рассмотрим пути его определения. Заметим, что стационарное (не пульсирующее от перехода к переходу) распределение достигается в эргодических и неэргодических цепях, если в матрице переходных вероятностей все элементы, расположенные на главной диагонали p_{ii}, не равны нулю.

Во-первых, для определения $\mathbf{S}^{\infty}$ можно «запустить» вычислительную процедуру (1.4), увеличивая число переходов k до тех пор, пока распределение не перестанет меняться. То, что оно рано или поздно перестает меняться, видно, например, из рис.1.4, где справа как раз и показаны установившиеся распределения.

Во-вторых, к установившемуся распределению (причем к точному) можно перейти сразу, минуя рекуррентный вычислительный процесс (1.4). Действительно, если установившееся состояние $\mathbf{S}^{\infty}$ наступило, то оно не изменится на очередном следующем переходе, то есть

$$\mathbf{S}^{\infty}=\mathbf{P}\mathbf{S}^{\infty}. \qquad (1.12)$$

Из (1.12) следует, что вектор $\mathbf{S}^{\infty}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{P}$, соответствующим ее собственному числу, равному единице (обязательно вспомните, что такое собственные числа и собственные векторы матриц). Процедура определения собственных векторов матрицы и выделение из них собственного вектора для собственного числа 1 легко выполняется с помощью средств компьютерной поддержки операций с матрицами (например, MATLAB).

Вернемся к матрице (1.11), положив в ней p=0,9. Поскольку ее размер 3x3, то у нее есть 3 собственных числа и 3 собственных вектора, которые оказываются равными

Собственные числа	-0.3500 + 0.7794i	-0.3500 - 0.7794i	**1.0000**
Собственные векторы	-0.2887 + 0.5000i	-0.2887 - 0.5000i	**-0.5774**
	0.5774	0.5774	**-0.5774**
	-0.2887 - 0.5000i	-0.2887 + 0.5000i	**-0.5774**

Искомый собственный вектор стоит в третьем столбце. Любой собственный вектор определен с точностью до постоянного множителя и может быть представлен разнообразным набором чисел. Его необходимо перенормировать, поделив каждый элемент на их сумму. В результате получится $S_1^{\infty}= S_2^{\infty}= S_3^{\infty}=1/3$, то есть установившееся распределение будет равномерным. К этому же результату мы придем по рекуррентной процедуре (1.4), результаты расчета по которой показаны на рис.1.7.

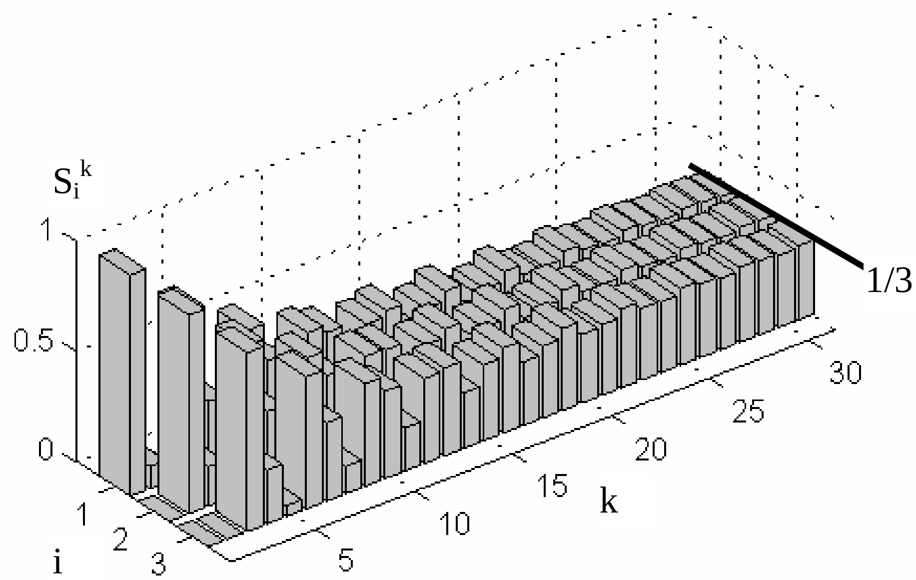


Рис.1.7. Переход системы с матрицей (1.11) к установившемуся состоянию

Почему среди собственных чисел матрицы переходных вероятностей обязательно должно найтись собственное число, равное единице? Оказывается, что если элементы матрицы удовлетворяют условиям (1.7), (1.8), это случится обязательно.

Обратим внимание на то, что установившееся распределение совершенно не зависит от того, каким было начальное распределение. Оно зависит только от матрицы переходных вероятностей. Естественно, что переходный процесс от начального распределения зависит. В частности, если в рассмотренном примере задать начальное распределение равномерным, то оно вообще не будет эволюционировать от перехода к переходу. Необходимо отметить, что наступление установившегося состояния не означает, что переходы между отдельными состояниями системы прекращаются. Просто формируется такое распределение вероятностей состояния, что на каждом переходе из вероятности данного состояния уходит в другие состояния столько же «вероятности», сколько приходит.

В рассмотренном примере установившееся распределение вероятностей состояния получилось равномерным. Посмотрим, каким условиям должна удовлетворять матрица переходных вероятностей, чтобы заранее сказать, что эта равномерность наступит. Посмотрим на первую строку матричного равенства (1.12) для матрицы размером 3x3. В этом случае равномерное распределение $S_1^{\infty}= S_2^{\infty}= S_3^{\infty}=1/3$ и строка примет вид

$$\frac{1}{3}=p_{11}\frac{1}{3}+p_{12}\frac{1}{3}+p_{13}\frac{1}{3}, \tag{1.13}$$

откуда следует, что

$$p_{11}+ p_{12}+ p_{13}=1, \tag{1.14}$$

то есть условием наступления равномерного установившегося распределения является равенство единице сумм элементов матрицы переходных вероятностей по строкам

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ i=1,2,\ldots,m. \tag{1.15}$$

Поскольку суммы элементов матрицы по столбцам всегда должны быть равны единицам, то вместе с условием (1.15) получается условие для матрицы, обеспечивающей в цепи асимптотически равномерное распределение. Ниже приведены две матрицы, каждая из которых соответствует цепи Маркова (суммы элементов по столбцам равны единицам). Однако матрица $\mathbf{P_1}$ асимптотически дает равномерное распределение, а матрица $\mathbf{P_2}$ – нет.

$$\mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Напомним, что в обоих случаях установившееся распределение не зависит от начального вектора состояния.

1.3. Некоторые дополнительные замечания

Поскольку цепь Маркова является графом случайного процесса, то вектор **S** изначально представляет собой организованный в столбец набор вероятностей состояний, а их сумма всегда равна единице, если пространство состояний является полным. Однако любая вероятность рассчитывается как отношение числа благоприятных исходов события N_i к общему числу испытаний N, то есть

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} S_1 \\ \ldots \\ S_i \\ \ldots \\ S_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{N_1}{N} \\ \ldots \\ \dfrac{N_i}{N} \\ \ldots \\ \dfrac{N_m}{N} \end{bmatrix}=\frac{1}{N}\begin{bmatrix} N_1 \\ \ldots \\ N_i \\ \ldots \\ N_m \end{bmatrix}, \text{ где } N=\sum_{i=1}^{m} N_i . \qquad (1.17)$$

Поскольку делитель N появляется в обеих частях рекуррентного равенства (1.4), его можно сократить и пользоваться вектором **S**, элементы которого уже представляют не вероятности состояния, а некоторые количества (число людей, массы фракций сыпучего материала, число приборов и т.д.), находящиеся в соответствующих состояниях. Достаточно часто такое представление более удобно и наглядно при рассмотрении конкретных задач. Матрица **P** при этом совершенно не меняется. Рассмотрим пример, основанный на таком представлении состояний [5].

Каждый житель страны может быть отнесен к одной из четырех групп: неработающие дети (1), работающие взрослые (2), пенсионеры (3) и умершие (4). Пусть каждый год 0,04 детей становятся работающими взрослыми, а 0,001 умирают; 0,03 работающих взрослых уходят на пенсию, а 0,01 умирают; умирают также 0,05 пенсионеров. Требуется найти установившееся число жителей в группах, если в год рождается 1000 детей.

Очевидно, что события переходов жителей из группы в группу связаны в цепь, матрица которой имеет вид

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0,959 & 0 & 0 & 0\\ 0,04 & 0,96 & 0 & 0\\ 0 & 0,03 & 0,95 & 0\\ 0,001 & 0,01 & 0,05 & 1\end{bmatrix}. \qquad (1.18)$$

Если ориентироваться только на эту матрицу, то установившееся распределение очевидно: $S_1^{\infty}= S_2^{\infty}= S_3^{\infty}=0$, $S_4^{\infty}=1$ (все умрут). Однако эта цепь особенная: каждый год в состояние 1 добавляется 1000 родившихся человек. Несмотря на то, что термин *цепь с порождением вероятности* существует, все-таки удобнее оперировать с числом людей в каждой группе. Если N_i – число людей в группах, то установившиеся их значения могут быть определены из уравнения баланса (сколько человек покинуло группу, столько же и пришло в нее):

$$\begin{array}{ll}\overbrace{1000}^{\text{Пришло}} = \overbrace{(0,04+0,001)N_1}^{\text{Ушло}} & \text{(дети)}\\ 0,04N_1=(0,03+0,01)N_2 & \text{(работающие взрослые)}\\ 0,03N_2=0,05N_3 & \text{(пенсионеры)}\end{array} \qquad (1.19)$$

Решая эту простую систему уравнений, получим: N_1=24390; N_2=24390,24; N_3=14634,14 (конечно, значащие цифры после запятой надо округлить).

Пусть пенсия у пенсионеров составляет $5000 в год и формируется из отчислений дохода работающих взрослых.

Легко определить годовые пенсионные отчисления: они составляют 5000*14634,14/24390,24=$3000 в год с каждого работающего.

Приведенные примеры уже показали, как универсально и эффективно применение теории цепей Маркова к математическому моделированию объектов различной природы. В следующих главах мы рассмотрим ее приложение к некоторым конкретным явлениям, возвращаясь как к теоретическим вопросам, так и к практике моделирования с использованием средств компьютерной поддержки расчетов.