© «Вестник ИГЭУ» Вып. 3 2007 г.

УДК 511.92

О ПРОБЛЕМАХ ФИГУРНЫХ ЧИСЕЛ

АВАНЕСОВ Э.Т., ГУСЕВ В.А., кандидаты физ.-мат. наук

Приводится анализ некоторых проблем фигурных чисел и решения соответствующих диофантовых уравнений.

Ключевые слова: фигурные числа, диофантово уравнение.

FIGURATE NUMBERS PROBLEM

AVANESOV E.T., Ph.D., GUSSEV V.A., Ph.D.

The article contains the analysis of some problems with figurate numbers and the solution of corresponding Diophantine equation.

Key words: figurate numbers, Diophantine equation.

Одну из интересных глав диофантова анализа составляют фигурные числа. Известные проблемы фигурных чисел касаются квадратов, треугольных, тетраэдральных и пирамидальных чисел [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Числа вида $t_x = \frac{1}{2}x(x+1)$, где x − натуральное число, называются треугольными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тетраэдральными числами называются числа вида $T_y = \frac{1}{6}y(y+1)(y+2)$ при натуральном y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пирамидальными числами называются числа вида $p_z = \frac{1}{6}z(z+1)(2z+1)$ при натуральном z.

Попарное приравнивание таких чисел приводит к проблемам, решение которых привлекает особое внимание[3].

Исследование подобных задач может эффективно опираться на следующую теорему.

ТЕОРЕМА (В.А. Демьяненко). Если (x,y)-точка с целочисленными координатами кривой

$$y^2 = x^3 + rx + s \tag{1}$$

над полем Q, то

$$\max\left\{\left|x^3\right|,|rx|,|s|,y^2\right\} \le 24^3 \max^{6+\varepsilon}\left\{4\left|r^3\right|,27s^2\right\}, \tag{2}$$

$\varepsilon \le 0,5$.

Приведем анализ некоторых проблем.

ЗАДАЧА 1. Найти все пирамидальные числа, являющиеся одновременно квадратами натуральных чисел.

Согласно определению 3, имеем диофантово уравнение

$$y^2 = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1). \tag{3}$$

Заметим, что неопределенное уравнение (3) было решено с помощью эллиптических функций [8], Люнггрен [4] дал решение, основанное на анализе уравнения Пелля в квадратичных полях. Морделл [5] указал на необходимость построения элементарного решения, которое и предлагается ниже.

Последовательные замены $x = \frac{u-1}{2}$, y = V и далее 72V = m, 6u = n приведут уравнение (3) к виду $m^2 = n^3 - 36n$.

Использование оценки (2) при r = 36, s = 0 даст

$$\max\left\{|n|^3, m^2\right\} \le 24^3\left(4 \cdot 36^3\right)^{6,5},$$

Из этого следует $|n| \le 24\left(4 \cdot 36^3\right)^{\frac{13}{6}}$.

Возвращаясь к переменной x, получим $|x| < 526574188274$.

Компьютерный поиск обнаружил единственную нетривиальную пару решений диофантова уравнения (3):

$x = 1,\ |y| = 1$ и $x = 24,\ |y| = 70$.

ЗАДАЧА 2. Найти все треугольные числа, являющиеся одновременно пирамидальными числами.

Из определения треугольных и пирамидальных чисел следует уравнение

$$3y(y+1) = x(x+1)(2x+1). \tag{4}$$

Полагая 2x + 1 = M и 2y + 1 = N, получим

$$3N^2 = M^3 - M + 3. \tag{5}$$

Умножив почленно на 27 и применив подстановку 9N = u, 3M = V, находим

$$u^2 = V^3 - 9V + 81. \tag{6}$$

Применяя оценку (2), получим

$$\max\left\{\left|V^3\right|,|9V|,u^2\right\} \le 24^3 \max\left\{4 \cdot 9^3, 27 \cdot 81^2\right\},$$

Из этого следует

$$|V| \le 24 \max^{2+\frac{\varepsilon}{3}}\{4 \cdot 729, 27 \cdot 6561\} \le 24 \cdot 177147^{\frac{13}{6}}.$$

Выполненный расчет при $|V| = 3|M|$ и M = 2x + 1 дает $|x| < 940697295606$.

Компьютерное вычисление выявило нетривиальные значения x для уравнения (4), а именно: $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 85$. Значит, кроме чисел 1, 55, 91 и 208335, не существует других треугольных чисел, являющихся одновременно пирамидальными числами [2, 7].

Аналогичное исследование можно провести для решения известной проблемы Эскота-Серпинского ([7]).

ЗАДАЧА 3. Найти все треугольные числа, являющиеся одновременно тетраэдральными.

Задача сводится к решению диофантова уравнения

$$3y(y+1) = x(x+1)(x+2). \qquad (7)$$

Замена u = 36(2y + 1), V = 12(x + 1) приводит к уравнению

$$u^2 = V^3 - 144V + 1296, \qquad (8)$$

для решения которого применима оценка (2):

$$|V| \le 24\max^{\frac{13}{6}}\left(4\cdot 144^3, 27\cdot 1296^2\right) \text{ или}$$

$$|V| < 932082607175481998 \text{ и}$$

$$|x| < 77673550597956833.$$

Соответствующий компьютерный расчет для уравнения (7) дает следующие целые положительные решения $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 8$, $x_4 = 20$, $x_5 = 34$.

Это позволяет установить решение проблемы Эскота-Серпинского в следующей формулировке: кроме чисел 1, 10, 120, 1540 и 7140 не существует других тетраэдральных чисел, являющихся одновременно треугольными числами.

ЗАДАЧА 4. Морделл [5] сформулировал гипотезу: диофантово уравнение

$$6y^2 = (x+1)\left(x^2 - x + 6\right) \qquad (9)$$

имеет только следующие решения для x:
x = –1; 0; 2; 7; 15; 74.

Указанное уравнение равносильно уравнению $y^2 = C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + C_x^3$.

Представляется интересным элементарное решение поставленной задачи. Для этого умножим почленно уравнение (9) на 216, тогда имеем

$$(36y)^2 = 216x^3 + 1080x + 1296.$$

Выполнив подстановку 36y = U, 6x = V, получим $U^2 = V^3 + 180V + 1296$.

Применим оценку (2):

$$\max\left\{\left|V^3\right|, U^2\right\} \le 24^3\cdot\max^{6+\varepsilon}\left\{4\cdot 180^3,\ 27\cdot 1296^2\right\},$$

из этого следует

$$|V| \le 24\cdot\max^{2+\frac{\varepsilon}{6}}\{4\cdot 5832000,\ 27\cdot 1679616\} =$$

$$= 24\cdot 45549632^{2+\frac{\varepsilon}{6}},\quad \varepsilon \le \frac{1}{2},$$

$$|x| = \left|\frac{V}{6}\right| \le 6\cdot(45349632)^{\frac{13}{6}} < 233020653163248413.$$

Компьютерный расчет дает решение уравнения (9), совпадающее с предположением Морделла.

Список литературы

1. **Аванесов Э.Т.** Решение одной проблемы фигурных чисел // Acta Arithmetica. – 1967. – Т. 12. – № 4.

2. **Аванесов Э.Т.** Диофантово уравнение 3y(y+1)=x(x+1)(2x+1) // Волжский математический сборник. – 1971. – № 8.

3. **Guy R.** Unsolved probiems in number theory // Springer-Verl. – New York, 1981.

4 **Ljunggren W.** New solution of a problem proposed by E.Lucas // Norsk Mat/ Tidskr. – 1952. – 34.

5. **Mordell L.J.** Diophantine Equations // Academic Press. – London and New York, 1969.

6. **Sirpinski W.** Elementary Theory of Numbers. – Warszawa, 1987.

7. **Uchiyama S.** Solution of a Diophantine Problem // Tsukuba Jorvin. Math. – 1984. – 8. – № 1.

8. **Watson Y. N.** The problem of a square pyramid // Messenger of Math. – 1918. – 48.

Аванесов Эдуард Тигранович,
Пятигорский государственный технологический университет,
кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики,
телефон 8-928-360-37-49.

Гусев Владимир Алексеевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»
кандидат физико-математических наук, профессор,
зам. декана факультета информатики и вычислительной техники,
e-mail: dekan@ivtf.ispu.ru