

Нелинейные колебания элемента трубопровода малой кривизны

Муницын А.И., канд. техн. наук, Крайнова Л.Н., соиск.

Проведено исследование свободных и вынужденных колебаний трубопровода в двух ортогональных плоскостях с учетом давления теплоносителя и малой кривизны отдельных участков. В математической модели учтена геометрическая нелинейность, обусловленная изменением длины средней линии стержня при неподвижных опорах. Приведены зависимости собственных частот изгибных колебаний трубопровода от величины избыточного давления и кривизны. Построены амплитудно-частотные характеристики в окрестности резонанса.

Ключевые слова: трубопровод, колебания, малая кривизна, избыточное давление, собственная частота, амплитудно-частотная характеристика

Non-linear oscillations of the pipeline element of a slight curve

Munitsyn A.I., Krainova L.N.

Forced oscillations of the pipeline in two orthogonal planes, taking into consideration the pressure of the heat-carrier and a small curvature of separate areas, are investigated. The geometrical non-linearity due to the change in the length of the central line of the rod accompanying flexural supports is taken into account. Three-dimensional double-frequency and chaotic modes of oscillations of the pipeline has been discovered.

Keywords: pipe line, fluctuations, small curvature, surplus pressure, own frequency, three-dimensional double-frequency and chaotic modes.

Введение. В процессе длительной эксплуатации горизонтальные участки высокотемпературных трубопроводов деформируются под действием собственного веса. Вследствие явления ползучести стали в области больших температур возникают остаточные деформации трубопроводов в виде малой кривизны отдельных участков. Большой интерес представляет также исследование колебаний маслоснабжающих трубопроводов высокого давления в гидравлических системах подъемных кранов, манипуляторов и буровых машин.

Поперечные колебания трубы под действием внутреннего потока идеальной несжимаемой жидкости исследовались в [1, 2]. Колебания трубы под действием бегущих волн давления в жидкости рассмотрены в [3]. В этом случае в системе возможны периодические параметрические колебания и хаотические колебания. В свою очередь, в исследованиях нелинейных колебаний стержня с закрепленными опорами [4] обнаружена взаимосвязь колебаний в различных направлениях, что приводит к существованию как плоских форм движения, так и пространственных, при которых точки стержня совершают движение по кругу.

Постановка задачи. Рассмотрим элемент трубопровода с двумя шарнирно неподвижными опорами. Полагаем, что деформация этого элемента происходит независимо от остальной части трубопровода. Пусть центральная ось в недеформированном состоянии совпадает с осью x прямоугольной системы координат, главные оси инерции поперечного сечения трубопровода

параллельны осям y и z . Концам трубы соответствуют координаты $x = 0$ и $x = L$. Элемент трубопровода имеет начальный прогиб $w_0(x)$ в плоскости xz . Обозначим через v, w перемещения точек средней линии стержня вдоль осей y и z . Уравнения изгибных колебаний стержня имеют следующий вид:

$$\rho F \ddot{v} + EJ_z v^{IV} - EF \varepsilon_0 v'' = q_y(x, t), \quad (1)$$

$$\rho F \ddot{w} + EJ_y w^{IV} - EF \varepsilon_0 w'' = q_z(x, t).$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по x ; точкой – производная по времени; E – модуль упругости материала; ρF – погонная масса трубы с учетом теплоносителя; J_y, J_z – осевые моменты инерции сечения, $q_y(x, t); q_z(x, t)$ – внешние нагрузки; ε_0 – продольная деформация средней линии стержня. Для неподвижных в продольном направлении опор продольная деформация средней линии определяется по формуле

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2L} \int_0^L [(v' + v'_0)^2 + (w' + w'_0)^2 - w_0'^2] dx. \quad (2)$$

Избыточное давление в теплоносителе p создает распределенную нагрузку, зависящую от кривизны упругой линии:

$$q_y(x, t) = -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial x} [p(v'_0)], \quad (3)$$

$$q_z(x, t) = -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial x} [p(w' + w'_0)],$$

где r – внутренний радиус трубы.

Система дифференциальных уравнений (1) должна быть дополнена граничными условиями. В

частности, для элемента трубы с шарнирными опорами имеем граничные условия $v = w = v'' = w'' = 0$ при $x = 0, L$.

Подставляя формулы (2) и (3) в уравнения (1) и переходя к безразмерным переменным, получаем два интегро-дифференциальных уравнения:

$$\pi^4 \ddot{v} + v^{IV} + \pi^2 \beta (v'') - 2\gamma \left[\int_0^1 (v'^2 + w'^2 + 2w'_0 w'_0) dx \right] v'' = 0;$$

$$\pi^4 \ddot{w} + w^{IV} + \pi^2 \beta (w'' - w''_0) - 2\gamma \left[\int_0^1 (v'^2 + w'^2 + 2w'_0 w') dx \right] w'' = 0.$$

(4)

Здесь все перемещения и координата x отнесены к длине стержня L , точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_1 t$; ω_1 – первая частота изгибных колебаний трубы без давления; $\beta = \frac{L^2 r^2}{\pi E J_y} p$ – безразмерное давление.

Рассмотрим решение задачи в одномодовом приближении и представим решение в виде

$$v(x, t) = \varphi_1(t) \cdot \sin(\pi x),$$

$$w(x, t) = \varphi_2(t) \cdot \sin(\pi x).$$

Полагаем начальную кривизну трубопровода совпадающей с первой формой колебаний

$$w_0(x, t) = \varphi_0 \cdot \sin(\pi x).$$

Подстановка в (4) и применение процедуры Бубнова-Галеркина приводит к системе с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + (1 - \beta)\varphi_1 + \gamma(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\varphi_0\varphi_2)\varphi_1 &= 0; \\ \ddot{\varphi}_2 + (1 - \beta)\varphi_2 + \gamma(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\varphi_0\varphi_2)\varphi_2 &= \beta\varphi_{20}. \end{aligned} \quad (5)$$

Собственные частоты колебаний трубопровода.

Система нелинейных дифференциальных уравнений (5) содержит нелинейности второго и третьего порядка. Воспользуемся методом гармонического баланса и будем искать решения в виде

$$\varphi_1 = b_1 \sin(\omega t), \quad \varphi_2 = a + b_2 \sin(\omega t),$$

где a – статический прогиб трубы в плоскости кривизны; b_1, b_2 – амплитуды малых колебаний в двух ортогональных плоскостях.

Подставляя это решение в систему (5) и приравнявая коэффициенты при постоянной составляющей и первой гармонике, учитывая только слагаемые первого порядка малости, получаем систему трех алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -(a - \varphi_0)\beta + \gamma(a^3 + 2\varphi_0 a^2) + a &= 0, \\ [1 - \beta - \omega^2 + \gamma a(3a + 4\varphi_0)]b_1 &= 0, \\ [1 - \beta - \omega^2 + \gamma a(a + 2\varphi_0)]b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из первого уравнения получаем зависимость статического прогиба трубы от величины давления теплоносителя:

$$\beta = a \frac{\gamma a^2 + 2\gamma \varphi_0 a + 1}{a + \varphi_0}.$$

Из условия существования нетривиального решения двух последних уравнений системы (6) получаем собственную частоту колебаний трубы в плоскости начального прогиба

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma a^3 + 5\gamma \varphi_0 a^2 + 4\gamma \varphi_0^2 a + \varphi_0}{a + \varphi_0}$$

и в ортогональной к ней плоскости

$$\omega_2^2 = \varphi_0 \frac{\gamma a^2 + 2\gamma a + 1}{a + \varphi_0}.$$

Зависимости собственных частот и статического прогиба от избыточного давления теплоносителя $\omega_1(\beta), \omega_2(\beta), a(\beta)$ приведены на рис. 1, 2, 3 соответственно. Вычисления проводились для значения параметра нелинейности $\gamma = 5250$, что соответствует трубе с внешним и внутренним диаметрами 406 мм и 374 мм и длине участка 20 м. Кривым 1 соответствует значение начальной кривизны $\varphi_0 = 3 \cdot 10^{-7}$, кривым 2 – $\varphi_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, 3 – $\varphi_0 = 3 \cdot 10^{-4}$, 4 – $\varphi_0 = 1 \cdot 10^{-3}$, 5 – $\varphi_0 = 3 \cdot 10^{-3}$.

Для трубопровода очень малой кривизны (кривая 1) собственные частоты уменьшаются с ростом давления и при значении $\beta = 1$ происходит потеря устойчивости системы. Новое положение равновесия определяется величиной статического прогиба, а частота колебаний в плоскости, ортогональной первоначальному прогибу, практически равна нулю. Для прямого участка трубы $\omega_2 = 0$, поскольку закритическое положение равновесия возможно в виде прогиба в любом направлении. Учет первоначального прогиба приводит к конечным значениям обеих собственных частот.

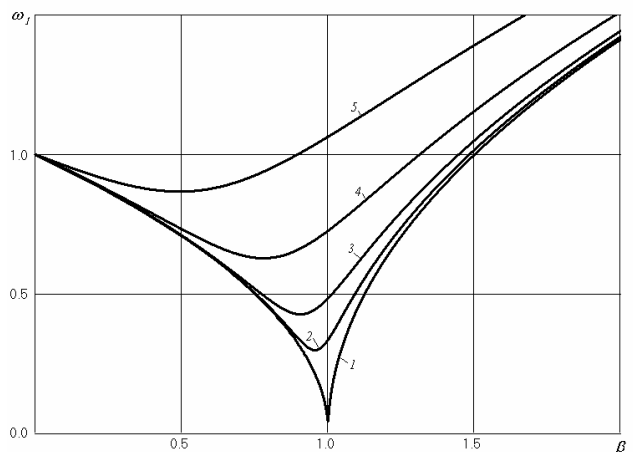


Рис. 1. Зависимости собственной частоты колебаний трубы в плоскости прогиба от давления теплоносителя

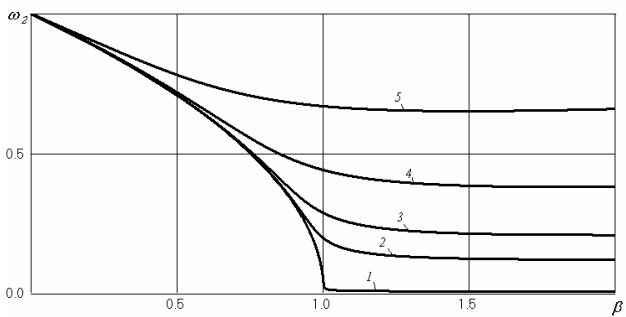


Рис. 2. Зависимости собственной частоты колебаний трубы в плоскости, ортогональной к плоскости прогиба, от давления теплоносителя

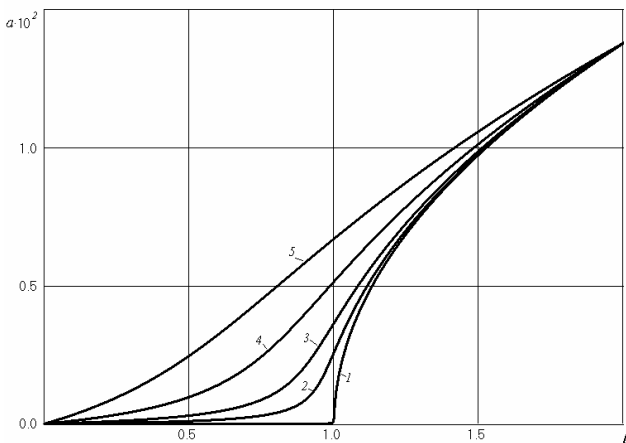


Рис. 3. Зависимости статического прогиба трубы от давления теплоносителя

Учет внутреннего давления и исходной кривизны трубы значительно влияет на спектр собственных частот. Даже в области малых значений давления теплоносителя собственные частоты трубы в двух ортогональных направлениях различны, что, согласно [4], приводит к наличию многозначности решений. В области главного резонанса в таких системах возможны как плоские, так и пространственные формы колебаний.

Вынужденные колебания под действием гармонической нагрузки. Пусть в плоскости начальной кривизны на элемент трубопровода действует нагрузка $q_{z0}(x, t)$, например, вследствие вибрации опор. Эту величину необходимо учитывать в правой части второго уравнения [4]. В одномодовом приближении получаем следующие два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \eta \dot{\varphi}_1 + (1 - \beta)\varphi_1 + \gamma(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\varphi_0\varphi_2)\varphi_1 &= 0; \\ \ddot{\varphi}_2 + \eta \dot{\varphi}_2 + (1 - \beta)\varphi_2 + \gamma(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\varphi_0\varphi_2)\varphi_2 &= \beta\varphi_{20} + f \sin \theta t, \end{aligned} \quad (7)$$

где f – амплитуда гармонического возбуждения, соответствующая первой форме колебаний; η – параметр диссипации.

Для решения полученной системы уравнений (7) использовался метод продолжения решения по параметру [5]. Представим искомые T -периодические решения в виде отрезка ряда Фурье и из условия ортогональности к базисным функциям по времени получим систему нелиней-

ных алгебраических уравнений относительно частоты θ и амплитуд A_{nj} . Первый индекс амплитуды соответствует номеру переменной, второй – базисной функции по времени. В полученную систему уравнений входят многомерные массивы S , элементы которых представляют собой определенные интегралы по времени на периоде T :

$$S_{k,i,n}A_{j,n}\theta^m + S_{k,i,n1,n2}A_{j1,n1}A_{j2,n2}\theta^{m1} + S_{k,i,n1,n2,n3}A_{j1,n1}A_{j2,n2}A_{j3,n3}\theta^{m2} = 0, \quad (8)$$

где $k = 1, 2$; $m, m1, m2 = 0, 1, 2$; $i, j, n, j1, j2, j3, n1, n2, n3 = 1, N$; N – число членов ряда Фурье. В (8) используется соглашение о суммировании по немым индексам.

При построении амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) вычислительный процесс начинается с некоторой точки, являющейся решением задачи. При решении задачи о собственных колебаниях в качестве начального приближения можно принять собственную частоту и соответствующую моду, определенную с точностью до константы. Величину этой константы всегда можно выбрать достаточно малой, чтобы система уравнений выполнялась с заведомо заданной точностью. При исследовании вынужденных колебаний процесс вычислений можно начинать с нулевой частоты и нулевых амплитуд. Варьируя входящие в систему (7) переменные и линеаризуя полученные уравнения, определяем приращения неизвестных. Таким образом, решение системы нелинейных уравнений сводится к решению последовательности систем линейных уравнений. На каждом шаге вычислений контролируется величина невязки и если относительная погрешность превышает заданную точность, то шаг варьируемой переменной уменьшается.

Изложенный метод не работает в особых точках, где определитель системы линейных уравнений равен нулю. В этих точках возможно ветвление решений рассматриваемой системы, что приводит к неоднозначности получаемых АЧХ. В этих случаях за независимый параметр принимается одна из остальных переменных, что позволяет найти все существующие решения.

Метод продолжения решения по параметру позволяет также исследовать устойчивость полученных решений на основе второго метода Ляпунова.

Описанный алгоритм реализован в пакете прикладных программ, исходными данными для него является описание системы уравнений (7) и выбор системы базисных функций по времени.

На рис. 4–6 приведены результаты расчетов, полученные с учетом постоянной составляющей, первой гармоники и гармоники $\theta/2$ в разложении в ряд Фурье функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$. Значения параметров задачи принимались следующими: $\gamma = 5250$; $\eta = 0,05$; $f = 0,001$; $\varphi_0 = 0,01$.

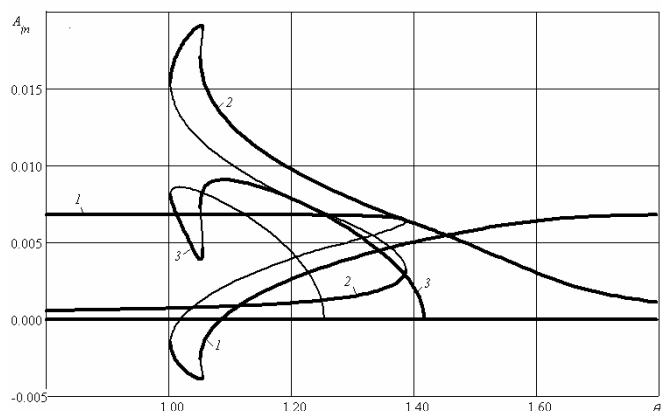


Рис. 4. АЧХ трубы для параметра давления $\beta = 0,8$

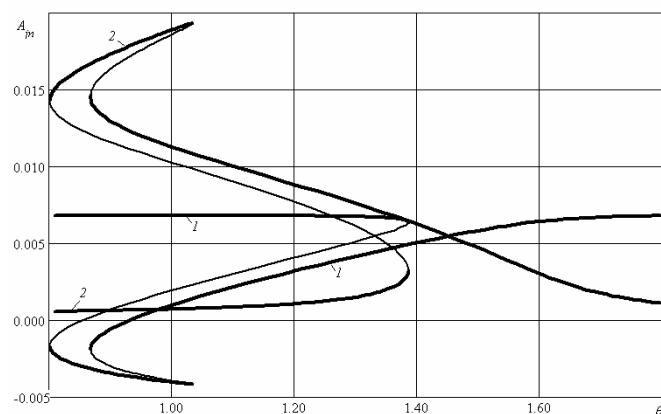


Рис. 5. АЧХ трубы для параметра давления $\beta = 0,8$ (плоская задача)

Жирными линиями показаны устойчивые участки решений. Кривым 1,2 соответствуют постоянная составляющая и амплитуда первой гармоники в плоскости действия нагрузки, кривой 3 – амплитуда гармоники с частотой $\theta/2$ колебаний в ортогональной плоскости. Остальные коэффициенты ряда Фурье равны нулю в обоих решениях.

На рис. 4 представлены результаты, соответствующие докритическому значению параметра давления $\beta = 0,8$. В диапазоне частот $1,0 < \theta < 1,44$ сечения трубы совершают пространственные колебания в плоскости yz , так что колебания в плоскости ортогональной нагрузки происходят с частотой, равной половине частоты возбуждения колебаний. Двухчастотный режим колебаний является следствием наличия квадратичной нелинейности в уравнениях (7). Максимальная амплитуда колебаний принадлежит изолированному устойчивому участку решений, для ее реализации необходимо наличие в системе внешних возмущений.

Для сравнения, на рис. 5 приведены АЧХ при тех же значениях параметров, полученные из решения плоской задачи, т. е. в предположении $\varphi_2 = 0$. Сравнение результатов показывает, что учет пространственных колебаний трубы приводит к качественному изменению амплитудно-частотных характеристик.

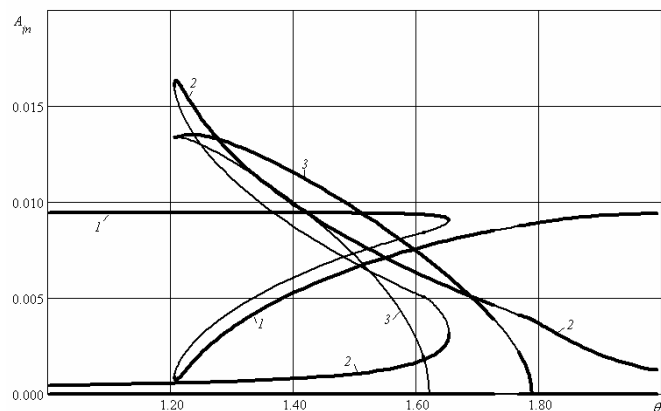


Рис. 6. АЧХ трубы для параметра давления $\beta = 1,2$

Пространственные колебания наблюдаются также и для закритического значения параметра давления $\beta = 1,2$ (рис. 6) в диапазоне частот $0,80 < \theta < 1,62$. В этом случае изолированный участок амплитудно-частотной характеристики отсутствует, однако в диапазоне частот $1,72 < \theta < 1,77$ не обнаружено никаких устойчивых периодических решений.

Для исследования поведения системы в этом диапазоне частот воспользуемся прямым численным интегрированием системы уравнений (7) методом Рунге-Кутты четвертого порядка с контролем погрешности на удвоенном шаге.

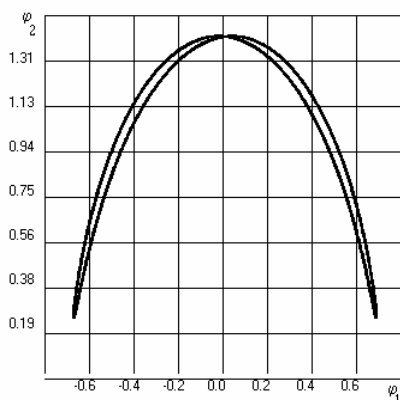
Установившийся режим движения представлен на рис. 7 в координатах $\varphi_1 - \varphi_2$ с увеличением в масштабе 1:100. Это есть траектория движения точек среднего сечения трубы при начальном прогибе $\varphi_{20} = 0,01$. Остальные значения параметров задачи такие же, что и в результатах, приведенных на рис. 6. На рис. 7,а приведен режим движения для значения безразмерной частоты $\theta = 1,66$. Этот результат полностью соответствует АЧХ, приведенным на рис. 6, и является устойчивым двухпериодическим движением.

На рис. 7,б приведен режим движения для значения безразмерной частоты $\theta = 1,76$. Траектории движения сечений являются незамкнутыми, что позволяет сделать заключение о хаотическом режиме установившихся колебаний.

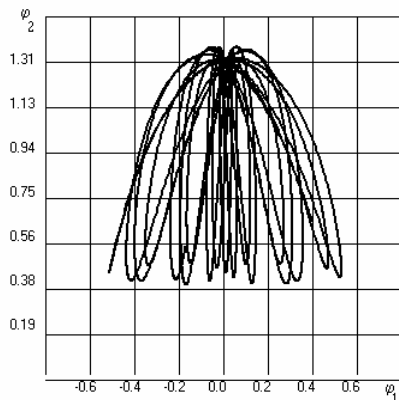
Проведенное исследование пространственных нелинейных колебаний элемента трубопровода позволяет сделать вывод о необходимости учета в модели двумерного движения сечений. В частности, в задачах технической диагностики трубопроводов это приводит к существованию дополнительных критериев и уточнению результатов, полученных для плоской модели. При движении трубопровода в режиме хаотических колебаний проведение технической диагностики традиционными методами становится невозможным.

Список литературы

1. **Светлицкий В.А.** Механика трубопроводов и шлангов. – М.: Машиностроение, 1982.
2. **Феодосьев В.И.** О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости: Инж. сб. – 1951. – Т. 10. – С.169–170.
3. **Ильгамов М.А., Мишин В.Н.** Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости / Изв. РАН, МТТ. – 1997. – № 1. – С.181–192.
4. **Муницын А.И.** Пространственные нелинейные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами // ПММ. – 2006. – Т. 70. – Вып. 1. – С. 82–90.
5. **Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л.** Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. – М.: Высш. шк., 1989.



а)



б)

Рис. 7. Траектория движения точек среднего сечения трубы: а – двухпериодическое движение; б – хаотическое движение

Муницын Александр Иванович,
Ивановский государственный энергетический университет,
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
e-mail: munitsyn@rambler.ru

Крайнова Лариса Николаевна,
Ивановский государственный энергетический университет,
старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики,
e-mail: krainova_larisa@mail.ru