© «Вестник ИГЭУ» Вып. 3 2008 г.

УДК 624.07:534.1

КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЕГУЩИХ ВОЛН ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ

МУНИЦЫН А.И., канд. техн. наук.

Исследуются свободные и параметрические изгибные колебания трубы с неподвижными шарнирными опорами. Возбуждение колебаний осуществляется бегущими волнами давления в теплоносителе. Учитывается геометрическая нелинейность, обусловленная изменением длины средней линии стержня при его пространственном движении. Рассматриваются колебания трубы с различными собственными частотами в двух взаимно перпендикулярных направлениях, вследствие несовпадения изгибных жесткостей либо жесткости опор в разных направлениях.

Ключевые слова: колебания, нелинейность, труба, бегущая волна, параметрический резонанс.

OSCILLATIONS OF A PIPELINE LOADED BY RUNNING WAVE OF HEATING MEDIUM

A.I. MUNITSYN, Candidate of Engineering

The free and parametric flexural oscillations of a pipe with hinged supports are investigated. The pipe is loaded by running wave of heating medium. The geometrical non-linearity due to the change in the length of the central line of the pipe accompanying its motion is taken into account. The oscillations of a pipe with different natural frequencies in two mutually perpendicular directions as a consequence of a variance in the flexural stiffnesses of a pipe or the stiffnesses of the supports in the different directions are considered.

Keywords: oscillations, non-linearity, pipe, running wave, parametric resonance.

В работах [1, 2] исследовались поперечные колебания трубы под действием внутреннего потока идеальной несжимаемой жидкости. Колебания трубы под действием бегущих волн давления в жидкости рассмотрены в [3]. В этом случае в системе возможны периодические параметрические колебания и хаотические колебания.

В исследованиях колебаний струны и стержня с закрепленными опорами [4, 5] обнаружена взаимосвязь колебаний в различных направлениях, что приводит к существованию как плоских форм движения струны, так и пространственных, при которых точки струны совершают движение по кругу.

При численном исследовании пространственных колебаний нерастяжимой [6] и упругой [7] нити с натяжным устройством также обнаружено существование плоских и пространственных форм движения, с той разницей, что система имеет мягкую, а не жесткую упругую характеристику.

Постановка задачи. Пусть центральная ось в недеформированном состоянии совпадает с осью x прямоугольной системы координат, главные оси инерции поперечного сечения параллельны осям y и z. Концам трубы соответствуют координаты $x = 0$ и $x = L$. Обозначим через u, v, w перемещения точек средней линии стержня. Исходя из технической теории изгиба балок, продольная деформация ε_x волокна, проходящего через точки с координатами y и z, равна

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2}\left[(v')^2 + (w')^2\right] - yv'' - zw''. \quad (1)$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по x; два последних слагаемых в правой части – деформация волокна от изгиба стержня; два первых слагаемых – деформация средней линии стержня; слагаемым $(u')^2/2$ пренебрегаем.

Принятая зависимость позволяет учесть удлинение средней линии, вызываемое перемещениями вдоль осей y и z. Выражения для потенциальной и кинетической энергии стержня имеют вид

$$U = \frac{EF}{2}\int_0^L \left[u' + \frac{1}{2}\left(v'^2 + w'^2\right)\right]^2 dx +$$

$$+\frac{EJ_z}{2}\int_0^L v''^2 dx + \frac{EJ_y}{2}\int_0^L w''^2 dx, \quad (2)$$

$$T = \frac{\rho F}{2}\int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx,$$

где E – модуль упругости; ρF – погонная масса трубы с учетом теплоносителя; J_y, J_z – осевые моменты инерции сечения; точкой обозначена производная по времени.

Воспользуемся принципом Гамильтона–Остроградского и получим систему трех уравнений в частных производных:

$$\rho F\ddot{u} - EF\varepsilon_0' = 0,$$

$$\rho F\ddot{v} + EJ_z v^{IV} - EF\left(\varepsilon_0 v'\right)' = q_y, \quad (3)$$

$$\rho F\ddot{w} + EJ_y w^{IV} - EF\left(\varepsilon_0 w'\right)' = q_z,$$

где $\varepsilon_0 = u' + \frac{1}{2}\left(v'^2 + w'^2\right)$ – продольная деформация средней линии стержня.

Избыточное давление в теплоносителе состоит из постоянной части и бегущей волны давления. При изгибе трубы возникает распределенная нагрузка, зависящая от кривизны упругой линии:

$$q_y(x,t) = -\pi r \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,t)\cdot v'\right],$$
$$q_z(x,t) = -\pi r \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,t)\cdot w'\right], \qquad (4)$$

где $p(x,t) = p_0 + p\sin(\omega t + 2\pi x / L_v)$; r – внутренний радиус трубы; L_v – длина волны давления.

Система (3) должна быть дополнена граничными условиями. В частности, для стержня с неподвижными шарнирными опорами на концах имеем граничные условия

$$u = v = w = v'' = w'' = 0 \text{ при } x = 0,\ L. \qquad (5)$$

Параметрические колебания. Для стержня, совершающего преимущественно изгибные колебания, в первом из уравнений (3) можно пренебречь величиной $\ddot{u}$, откуда следует независимость ε_0 от координаты x. Предполагая отсутствие относительного продольного смещения опор согласно уравнениям (5), получаем

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\int_0^1\left(v'^2 + w'^2\right)dx. \qquad (6)$$

Подставляя это выражение в остальные два уравнения (3), имеем два интегро-дифференциальных уравнения в безразмерных переменных:

$$\pi^4\ddot{v} + v^{IV} + \left[\beta_0 + \beta_1\sin(\alpha t + lx)\right]v'' +$$
$$+\beta_2\cos(\alpha t + lx)v' -$$
$$-2\gamma\left[\int_0^1\left(v'^2 + w'^2\right)dx\right]v'' = 0,$$
$$\pi^4\ddot{w} + w^{IV} + \left[\beta_0 + \beta_1\sin(\alpha t + lx)\right]w'' + \qquad (7)$$
$$+\beta_2\cos(\alpha t + lx)w' -$$
$$-2\gamma\left[\int_0^1\left(v'^2 + w'^2\right)dx\right]w'' = 0.$$

Здесь все перемещения и координата x отнесены к длине стержня L; точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени, которое получается из исходного умножением на частоту малых свободных колебаний в плоскости xy

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{EJ_z}{\rho F}\right)^{1/2};$$

и введены следующие параметры:

$$\beta_0 = \frac{L^2\pi r}{EJ_y}p_0;\quad \beta_1 = \frac{L^2\pi r}{EJ_y}p;\quad \beta_2 = 2\pi L_v\beta_1;$$

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_1};\quad l = \frac{L}{L_v};\quad \gamma = \frac{FL^2}{4J_z};\quad c = \frac{J_y}{J_z}.$$

Ограничимся случаем одномодового приближения и представим решение в виде

$$v(x,t) = \varphi_1(t)\cdot\sin(\pi x);\ w(x,t) = \varphi_2(t)\cdot\sin(\pi x).$$

Подстановка в (5) и применение процедуры Бубнова-Галеркина приводит к системе с двумя степенями свободы:

$$\ddot{\varphi}_1 + \left[\frac{4}{\alpha^2}\left(1-\beta_0{}^2\right)^{1/2} + 2h\varepsilon\cos 2t\right]\varphi_1 +$$
$$+\varepsilon\gamma\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)\varphi_1 = 0,$$
$$\ddot{\varphi}_2 + \left[\frac{4}{\alpha^2}\left(1-\beta_0{}^2\right)^{1/2}\left(1+\varepsilon\delta\right) + 2h\varepsilon\cos 2t\right]\varphi_2 + \qquad (8)$$
$$+\varepsilon\gamma\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)\varphi_2 = 0.$$

Здесь $c = 1 + \varepsilon\delta$ и введен малый параметр ε, так что нелинейность системы, амплитуда параметрического возбуждения и разность собственных частот малы, что позволяет применить эффективные методы нелинейной механики [8, 9]. Параметр εh зависит от величины переменной части давления и длины волны.

Собственная частота полученной системы зависит от величины постоянной составляющей давления, и при β = 1 происходит потеря устойчивости трубопровода. Далее предполагаем давление теплоносителя много меньшим критического и без ограничения общности положим $\frac{4}{\alpha^2}\left(1-\beta_0{}^2\right)^{1/2} = 1$. Произведя в системе (8) замену переменных

$$\varphi_1 = a\cdot\cos((1+\varepsilon\lambda)t + \alpha),$$
$$\dot{\varphi}_1 = -a(1+\varepsilon\lambda)\cdot\sin((1+\varepsilon\lambda)t + \alpha),$$
$$\varphi_2 = b\cdot\cos((1+\varepsilon\lambda)t + \beta), \qquad (9)$$
$$\dot{\varphi}_2 = -b(1+\varepsilon\lambda)\cdot\sin((1+\varepsilon\lambda)t + \beta)$$

и применяя метод усреднения, получим достаточно простую систему уравнений в медленных переменных:

$$\dot{a} = \frac{1}{8}\varepsilon\gamma ab^2\sin 2(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\varepsilon ha\sin 2(\varepsilon\lambda t + \alpha),$$
$$\dot{b} = \frac{1}{8}\varepsilon\gamma a^2 b\sin 2(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\varepsilon hb\sin 2(\varepsilon\lambda t + \beta),$$
$$\dot{\alpha} = -\varepsilon\lambda + \frac{3}{8}\varepsilon\gamma a^2 + \frac{1}{8}\varepsilon\gamma b^2\left(2 + \cos 2(\alpha-\beta)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon h\cos 2(\varepsilon\lambda t + \alpha), \qquad (10)$$
$$\dot{\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon(\delta - 2\lambda) + \frac{3}{8}\varepsilon\gamma b^2 +$$
$$+\frac{1}{8}\varepsilon\gamma a^2\left(2 + \cos 2(\alpha-\beta)\right) + \frac{1}{2}\varepsilon h\cos 2(\varepsilon\lambda t + \beta),$$

где a, b и α, β – амплитуды и фазы парциальных колебаний; λ – частотная расстройка; колебания рассматриваются в малой окрестности единичной частоты.

Для случая установившихся колебаний производные по времени в левой части равны нулю и система (10) имеет три решения:

1) $b = 0$ – колебания в плоскости xy. Из первого уравнения получаем $\sin 2(\varepsilon\lambda t + \alpha) = 0$, что позволяет получить амплитудно-частотную зависимость из третьего уравнения (10):

$$\lambda = \frac{3}{8}\gamma a^2 \pm \frac{h}{2} \quad \text{или} \quad a(\lambda) = \left(\frac{8}{3\gamma}\left(\lambda \mp \frac{h}{2}\right)\right)^{1/2}; \qquad (11)$$

2) $a = 0$ – колебания в плоскости xz, аналогично из второго уравнения $\sin 2(\varepsilon\lambda t + \beta) = 0$ и из четвертого

$$\lambda = \frac{\delta}{2} + \frac{3}{8}\gamma b^2 \pm \frac{h}{2} \quad \text{или} \quad b(\lambda) = \left(\frac{8}{3\gamma}\left(\lambda - \frac{\delta}{2} \mp \frac{h}{2}\right)\right)^{1/2}; \qquad (12)$$

3) $\alpha - \beta = \pm\pi/2$, в этом случае из первых двух уравнений (10) следует

$$\sin 2(\varepsilon\lambda t + \alpha) = \sin 2(\varepsilon\lambda t + \beta) = 0,$$

два последних уравнения принимают вид

$$-\lambda + \frac{3}{8}\gamma a^2 + \frac{1}{8}\gamma b^2 \pm \frac{h}{2} = 0,$$

$$\frac{\delta}{2} - \lambda + \frac{3}{8}\gamma b^2 + \frac{1}{8}\gamma a^2 \pm \frac{h}{2} = 0.$$

Решением полученной системы уравнений является амплитудно-частотная зависимость пространственных колебаний стержня, соответствующая движению точек средней линии по эллипсу в плоскости yz:

$$\lambda = \frac{3\delta}{4} + \frac{1}{2}\gamma b^2 \pm \frac{h}{2}, \quad \lambda = -\frac{\delta}{4} + \frac{1}{2}\gamma a^2 \pm \frac{h}{2},$$

$$a(\lambda) = \left(\frac{2(\lambda + \delta/4 \mp h/2)}{\gamma}\right)^{1/2},$$

или $\qquad (13)$

$$b(\lambda) = \left(\frac{2(\lambda - 3\delta/4 \mp h/2)}{\gamma}\right)^{1/2}.$$

Анализ результатов. Полученные решения (11)–(13) позволяют исследовать свободные колебания трубы, положив $h = 0$. Соотношения (11)–(12) описывают известную зависимость амплитуды от частоты свободных колебаний стержня в плоскости [5] (рис. 1, кривые 1, 2 для $\gamma = \delta = 1$). В решении (13) действительным значениям b соответствует область частот больших $\lambda = 3\delta/4$ и для возникновения пространственных колебаний необходимо, чтобы амплитуда a превышала критическое значение $a_* = (2\delta/\gamma)^{1/2}$. На рис. 1 зависимостям (13) соответствуют кривые 3 ($a(\lambda)$) и 4 ($b(\lambda)$). При $a < a_*$ в рассматриваемой системе возможны только плоские колебания, при $a > a_*$ наряду с плоскими существует пространственная форма движения стержня.

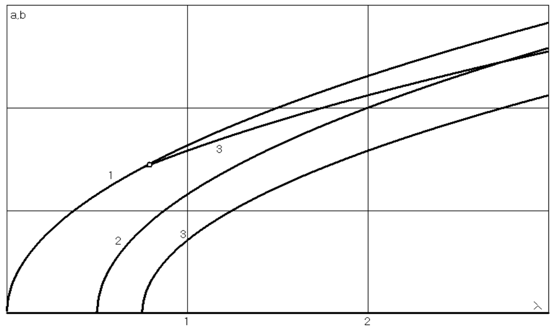

Рис. 1. Зависимость парциальных амплитуд от частотной расстройки

Таким образом, в зависимости от начальных условий, свободные колебания стержня – это либо независимые между собой колебания во взаимно ортогональных плоскостях с двумя разными частотами, либо к ним добавляется еще и пространственная форма движения с третьей частотой колебаний. В общем случае в результирующем движении присутствуют три гармоники с близкими частотами. В случае $\delta = 0$ качественная картина колебаний соответствует решению, полученному для колебаний струны [4, 6, 7], которое может быть представлено как сумма плоского и пространственного движений.

Решения (11)–(13) для значения параметра $h = 0,2$ представлены на рис. 2. Каждая пара решений повторяет очертания соответствующих амплитудно-частотных зависимостей, образуя вдоль них области шириной h по оси λ. Из анализа решений следует, что при $-h/2 < \lambda < (\delta - h)/2$ существует одно решение, соответствующее параметрическим колебаниям трубопровода в плоскости меньшей изгибной жесткости. При $(\delta - h)/2 < \lambda < 3\delta/4 - h/2$ возможны колебания в той и другой плоскостях, и при $3\delta/4 - h/2 < \lambda$ существует параметрический резонанс с пространственной формой движения трубопровода. Для более детального анализа требуется исследование устойчивости полученных решений.

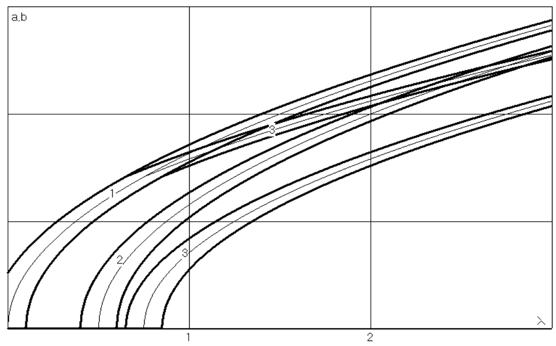

Рис. 2. Зависимость амплитуд параметрических колебаний от частотной расстройки

Список литературы

1. **Светлицкий В.А.** Механика трубопроводов и шлангов. – М.: Машиностроение, 1982.

2. **Феодосьев В.И.** О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. – 1951. – Т.10. – С.169–170.

3. **Ильгамов М.А., Мишин В.Н.** Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. АН, МТТ. – 1997. – № 1. – С.181–192.

4. **Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.** Нелинейные колебания струны // Изв. АН. МТТ. – 1993. – № 4. – С. 87–92.

5. **Муницын А.И.** Пространственные нелинейные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами // ПММ. – 2006. – Т.70. – Вып 1. – С. 82–90.

6. **Муницын А.И.** Нелинейные колебания нити с натяжным устройством // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 2. – С. 24–30.

7. **Муницын А.И.** Пространственные нелинейные колебания упругой нити с натяжным устройством // Пробл. машиностр. и надежн. машин. – 2001.–- № 2. – С. 21–28.

Муницын Александр Иванович,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
e-mail: munizin@rambler.ru